GIOCHI DI SEGNALAZIONE

Bruno Chiarini

Introduzione

Il fenomeno è legato alla asimmetria nella struttura dell'informazione. La segnalazione genera informazione riguardo le caratteristiche o i tipi degli individui. Gli individui in una interazione possono essere caratterizzati da una diversa abilità, avversione al rischio, grado di fiducia, produttività ecc..

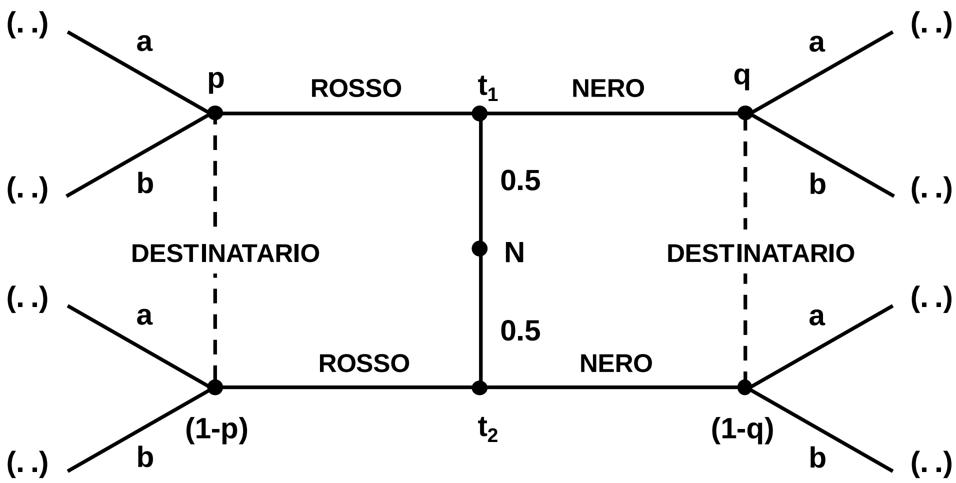
Questo tipo di problemi genera dei segnali (azioni, scelte) da parte di alcuni individui che vogliono manifestare o nascondere alcune loro caratteristiche, mentre i destinatari di tali segnali dovranno interpretarli in maniera appropriata.

Ad esempio, quando si richiede un credito ad una banca, di solito si ottiene soltanto un ammontare limitato al tasso di interesse prevalente. In genere il credito e' "razionato" nel senso che non si può comprare quanto credito si vuole al prezzo di mercato (tasso di interesse). Questo e' un aspetto peculiare che ha soltanto il credito, infatti, per gli altri beni per cui esiste un mercato, si può comprare la quantità desiderata. Tuttavia vediamo che le banche tentano di espandere il credito, ma non offrendo più credito a un particolare richiedente o investitore, ma tentando di attrarre più richiedenti o imprenditori (razionando comunque ognuno di essi). Quando una banca concede un prestito lo fa su una promessa di rimborso da parte dell'investitore, tuttavia non ha piena possibilità di valutare la qualità della promessa di rimborso. Se l'investitore è un noto "gambler" o "risk-lover", ovviamente queste promesse non dovrebbero avere molta fiducia. Consci di questa mancanza di fiducia nei loro confronti, gli investitori meno prudenti e più amanti del rischio avranno vantaggi nel mostrarsi (con i loro progetti di investimento) come imprenditori cauti e "risk-adverse" mentre gli imprenditori onesti tenderanno a segnalare la loro bassa propensione al rischio con opportune decisioni (non accettare credito ad un prezzo molto elevato ed accettare le richieste della banca di fornire un alto collaterale). Questo caso illustra come il razionamento del credito può avvenire quando non si possono avere equilibri separatori capaci, cioè di distinguere i tipi di investitori.

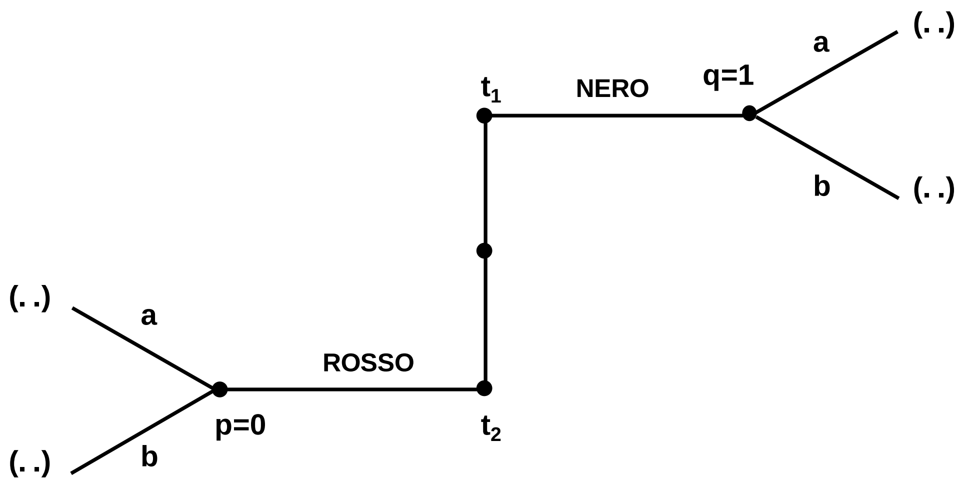
Un problema analogo si trovano ad affrontare le compagnie di assicurazione. Queste non hanno modo di osservare la probabilità di sinistro di un particolare cliente (un giovane già esperto, oppure un giovane inesperto e magari con propensione a bere alcoolici, un amante della velocità e del rischio ecc.). E tuttavia devono definire il premio e l'ammontare di assicurazione che il cliente può acquistare: cioè il prezzo e l'estensione del rischio che si deve coprire. Clienti ad alto rischio e clienti a basso rischio avranno vantaggi diversi ad inviare segnali diversi.

Quando un'impresa deve assumere un lavoratore, cerca tra la possibile offerta di curricula, gli individui con una maggiore capacità-abilità produttiva. Anche qui, i componenti dell'offerta di lavoro (abili e meno abili) tenderanno a inviare segnali diversi, gli uni per cercare di “confondere” e gli atri (quelli più abili) per cercare di distinguersi.

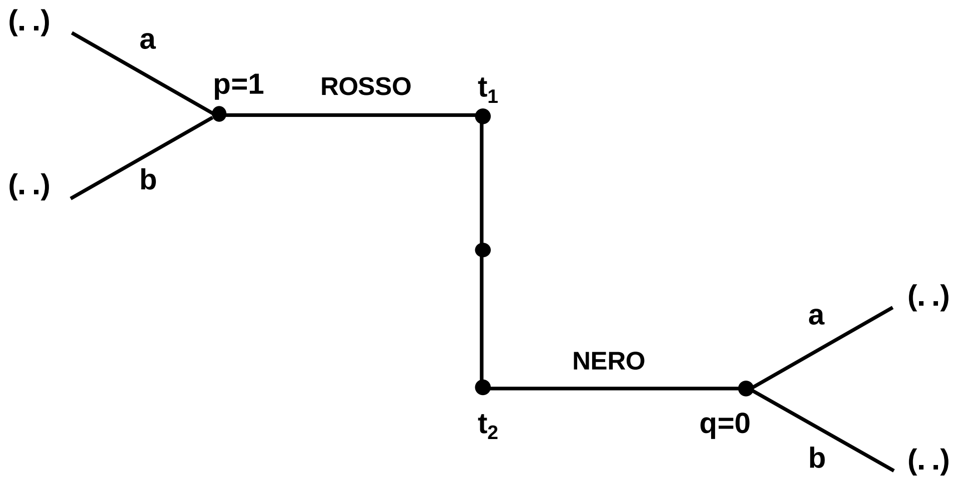
Uno schema di analisi per i giochi di segnalazione.



Equilibri separatori (Nero-Rosso):



Equilibri separatori (Rosso-Nero):



Occorre notare, nelle strategie separating, le probabilità attribuite ai singoli nodi di decisione. Nel separating ogni tipo invia un messaggio differente, quindi le probabilità con cui raggiungono l'insieme informativo del destinatario sono piene (uguali a 1). Nel separatore (Nero-Rosso), $q=1$ (quindi $1-q=0$) e p=0 (quindi $1-p=1$). Nel primo caso si invia un messaggio Nero con probabilità q=1 sul sentiero informativo di destra del destinatario e un messaggio Rosso con probabilità uguale a $1-p=1$ sul sentiero informativo di sinistra. La situazione è esattamente opposta nel caso del separatore (Rosso-Nero).

PROBLEMI CON GLI EQUILIBRI DI POOLING.

Per analizzare se un pooling può essere considerato un Equilibrio Bayesiano Perfetto, consideriamo un tipico gioco di segnalazione dove si sta esaminando il pooling di sinistra. Una maniera intuitiva è di proseguire è quella dell'analisi delle risposte ottime del giocatore II (il destinatario dei messaggi inviati dai tipi del giocatore I) alle strategie dei tipi e il confronto con le alternative a loro disponibili. Si possono immaginare i seguenti steps:

1) Nel pooling, il destinatario (il giocatore II) risponde utilizzando la sua strategia ottima che ottiene calcolandosi la sua utilità attesa, utilizzando le informazioni di Natura (una distribuzione di probabilità di *conoscenza comune*). Nel caso Natura scelga un tipo del giocatore I con probabilità pari a 0.5 avremo:

Es.
$$gioco \quad a : x_1 \ \frac{1}{2} + y_2 \ \frac{1}{2} = z$$
$$gioco \quad b : x_1 \ \frac{1}{2} + y_2 \ \frac{1}{2} = g$$

Dove x e y sono valori (con i pedici che indicano il nodo alto e il nodo basso) che costituiscono le payoff. Ovviamente se $z>g$, l'utilità (o payoff) attesa ottenuta giocando la strategia *(a)* è superiore e quindi quest'ultima è da preferirsi alla (*b*) e viceversa. Nel caso Natura definisca una distribuzione diversa il procedimento è analogo a quello ora descritto, tenendo conto le diverse probabilità nel calcolo delle payoff attese. Ad esempio, nel caso la distribuzione di probabilità sia 0.4 e 0.6, rispettivamente per il tipo 1 e per il tipo 2 del giocatore I, avremo:

Es.
$$gioco \quad a : x_1 \ \frac{2}{5} + y_2 \ \frac{3}{5} = z$$
$$gioco \quad b : x_1 \ \frac{2}{5} + y_2 \ \frac{3}{5} = g$$

Queste sono le utilità attese del giocatore II (destinatario) con cui stabilisce quale strategia costituisce la miglior risposta (in termini di payoff attesa) ai messaggi del mittente attraverso i tipi.

2) Ovviamente il destinatario non calcola le sue utilità attese se una delle sue strategie è strettamente dominata. La scelta è sulla strategie dominante che non lascia esitazioni.
3) Si indichino le payoff dei due tipi del mittente (giocatore I) corrispondenti alla strategia ottima del giocatore II.
4) Si confrontino queste due payoff, con quelle del pooling (dei rami) del lato opposto (lato destro) per constatare se esiste la possibilità di ottenere una payoff maggiore e, quindi, l'incentivo a deviare da una soluzione di pooling. A tal fine, si considerino subito le payoff del giocatore I che, in questo lato, otterrebbe con le due strategie. Se una delle due payoff relative ai due tipi è inferiore, viene meno la strategia di pooling (che vuole, invece messaggi analoghi da parte di diversi tipi del mittente). In questo lato destro, occorre quindi individuare, se esiste, la strategia del giocatore II che produce payoff inferiori o uguali a quelle ottenute nel pooling del lato sinistro per entrambi i tipi. Se esiste, questa è la strategia che dovrebbe giocare il giocatore II affinché la strategia pooling sia un EBP. Tuttavia questa per essere giocata dal giocatore II deve essere una strategia ottima per lui.
5) In altri termini, il giocatore II deve massimizzare le sue utilità attese. In questo caso, date le credenze, deve trovare se esiste una *probabilità positiva* per giocare la strategia che rende il pooling un EBP. Si dovrà quindi calcolare:

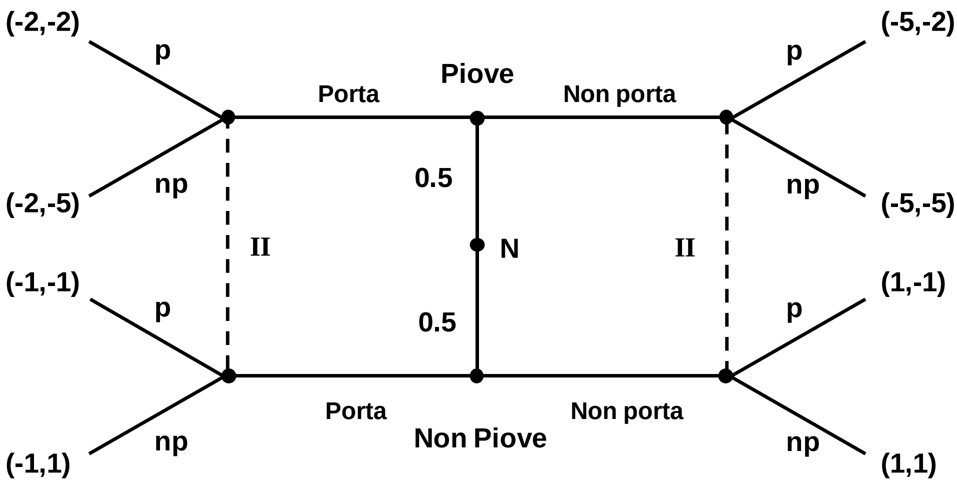
$$gioco \quad a : x_1 \ \ q + y_2 \ \ (1 \quad q) = z$$
$$gioco \quad b : x_1 \ \ q + y_2 \ \ (1 \quad q) = g$$

Ora z e g sono relazioni tra i valori delle payoff e le probabilità. Come di consueto si potrà analizzare se la strategia di interesse ha una probabilità positiva di essere giocata. Una volta constatato che con una certa probabilità la strategia in questione diviene ottima, nel senso che massimizza l'utilità attesa di II, essa fa parte nella definizione di equilibrio pooling.

6) La nostra trattazione è intuitiva ed sostanzialmente ad hoc. Di fatto l'analisi si concentra, come al solito, sugli equilibri sul sentiero di equilibrio e su quelli fuori dal sentiero di equilibrio. In quest'ultimo, sappiamo che l'Equilibrio Bayesiano Perfetto permette ai giocatori di avere credenze anche se arbitrarie (non calcolate e aggiornate con Bayes). Ad esempio, parlando di un generico pooling (L,L) sul lato sinistro del grafo e (R,R) sul lato destro del grafo, quando analizziamo il pooling (L,L), i giocatori sono coinvolti su questo sentiero di equilibrio e le credenze valgono per questo sentiero di equilibrio. Lo stato informativo del giocatore II a destra di questo sentiero di equilibrio (R,R) non è mai raggiunto in equilibrio.

   Questi giochi hanno tre giocatori. Due tipi per il giocatore I e il giocatore II. Negli equilibri *separatori*, ogni tipo del giocatore I sceglie una strategia segnalando appunto il suo tipo. In questi equilibri, entrambi gli stati informativi vengono raggiunti (entrambi gli insiemi informativi del giocatore II sono sul sentiero di equilibrio). Negli equilibri di *pooling* entrambi i tipi seguono la stessa strategia e gli stati informativi raggiunti con probabilità positiva sono solo quelli chiamati in causa da queste strategie.

Esempio 1. Gioco dell'Ombrello e le condizioni Meteo.



Pooling (Porta-Porta)

In questo il giocatore I con i suoi due tipi porta sempre l'ombrello. Il giocatore II massimizza la sua utilità attesa:

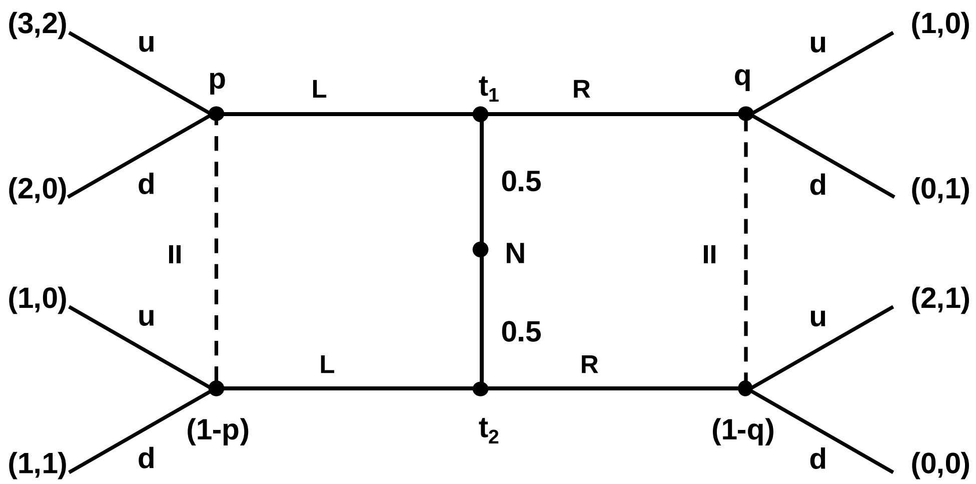
$$
\begin{aligned}
&gioco \quad p:(\ \ 2)\ \ 0.5+(\ \ 1)\ \ 0.5= \ \ 1.5\\
&gioco \quad np:(\ \ 5)\ \ 0.5+1\ \ 0.5=-2
\end{aligned}
$$

II giocherà Porta. Quindi il giocatore I se piove prenderà -2 e se c'è il sole -1. Occorre vedere se esiste l'incentivo a deviare guardando al lato destro caratterizzato dai messaggi non-porta-non-porta. Si nota come se ora il giocatore II porta l'ombrello, il tipo 1 (piove) ottiene -5 mentre il tipo 2 (sole) ottiene 1. Nel caso II giochi non-porta, il tipo 1 ottiene -5 e il tipo 2 prende 1. Dunque in entrambi i casi si crea un incentivo a deviare in quanto per il tipo 2 la payoff è sempre maggiore di quella ottenuta con il pooling Porta-Porta: non può essere un EBP.

Pooling (Non-Porta-Non-Porta)

Notate che le payoff delle due strategie del giocatore II in questto pooling sono del tutto analoghe a quelle del pooling precedente, dove sappiamo gioca sempre Porta. Quindi Porta è la strategia ottima di II. I tipi Pioggia e Sole ottengono rispettivamente -5 e 1. Per analizzare se non esiste un incentivo a deviare, notiamo immediatamente che nel lato sinistro del grafo, sia se il giocatore II seleziona porta sia che selezioni non-porta i due tipi del giocatore I ottengono sempre -2 e -1. Rimane un incentivo a deviare e quindi anche questo pooling non è un EBP.

Esempio 2. Un problema di indifferenza nella scelta delle strategie



Pooling (LL)

Il giocatore II calcola le sue utilità attese per constatare che giocherà *u*:

$$\begin{aligned} &gioco \quad u: 2\ \ 0.5 + 0\ \ 0.5 = 1 \\ &gioco \quad d: 0\ \ 0.5 + 1\ \ 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Per tale strategia i tipi 1 e 2 del giocatore I otterranno, rispettivamente 3 e 1. Occorre, verificare che sia ottimale per questi tipi giocare il pooling LL, rivolgendosi verso il pooling RR.
Consideriamo la parte destra del grafo.

$$\begin{aligned} &se\ II\ gioca\ u \quad t_1 = 1 \quad t_2 = 2 \\ &se\ II\ gioca\ d \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \end{aligned}$$

Affinché (LL) sia un EBP, quando I valuta le payoff dei suoi tipi su R, il giocatore II deve giocare (*d*) in modo che non ci sia alcun incentivo a deviare. Il giocatore II, tuttavia, può giocare questa strategia solo se è ottimale giocarla. A questo proposito dovrà calcolarsi le utilità attese, date le credenze:

$$\begin{aligned} &gioco \quad u: 0\ \ q + 1\ \ (1\ \ \ q) = 1\ \ \ q \\ &gioco \quad d: 1\ \ q + 0\ \ (1\ \ \ q) = q \end{aligned}$$

affinché II giochi (*d*) dovrà valere la seguente disuguaglianza: $q \geq 1\ \ \ q$, cioè $q \geq 1/2$. Quindi

[(*LL*), (*u*,*d*) con *p=0.5* e $q \geq 1/2$ **]** è un EBP

Lettura dellôequilibrio: **In questa specificazione, (L,L) è il pooling (le strategie dei due tipi del giocatore I); (*u*,*d*) sono le strategie (le risposte) ottime del giocatore II rispettivamente sul lato sinistro (sul sentiero di equilibrio L,L) e sul lato destro (fuori dal sentiero di equilibrio R,R).**

Interpretazione dellôequilibrio: **Entrambi i tipi del giocatore I segnaleranno la strategia L, il giocatore II risponderà con la strategia *u* mentre adotterà una strategia *d* con chi segnala R. Inoltre attribuisce una probabilità $q \geq 1/2$ al fatto che il tipo che segnala R sia t_1.**

Pooling (RR)

La risposta ottima per II eriva dal confronto delle seguenti utilità attese:

$$\begin{array}{l} gioco \quad u: 0 \ \ 0.5 + 1 \ \ 0.5 = 0.5 \\ gioco \quad d: 1 \ \ 0.5 + 0 \ \ 0.5 = 0.5 \end{array}$$

Per il giocatore II sul lato destro del grafo, è indifferente giocare (*u*) o (*d*), quindi consideriamo entrambi i casi.

$$\begin{array}{l} se\ II\ gioca\ u \quad t_1 = 1 \quad t_2 = 2 \\ se\ II\ gioca\ d \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \end{array}$$

E' subito evidente che quando II gioca (*d*) il giocatore I non opterà per la strategia R in quanto notiamo dalla figura che qualsiasi strategia adotti II procurerà una payoff per i due tipi sempre maggiore di (0,0): (R,R) non può essere un EBP.
Se II gioca (*u*) sul lato R, I ottiene per i suoi tipi, rispettivamente 1 e 2. Anche qui, vediamo che le reazioni sul lato (L,L) non permettono che (R,R) sia un EBP. Infatti sul lato sinistro, se II gioca *u*, come accennato, questo comporta $t_1 = 3, t_2 = 1$; se II gioca *d*, su questo lato si avrebbe $t_1 = 2, t_2 = 1$.

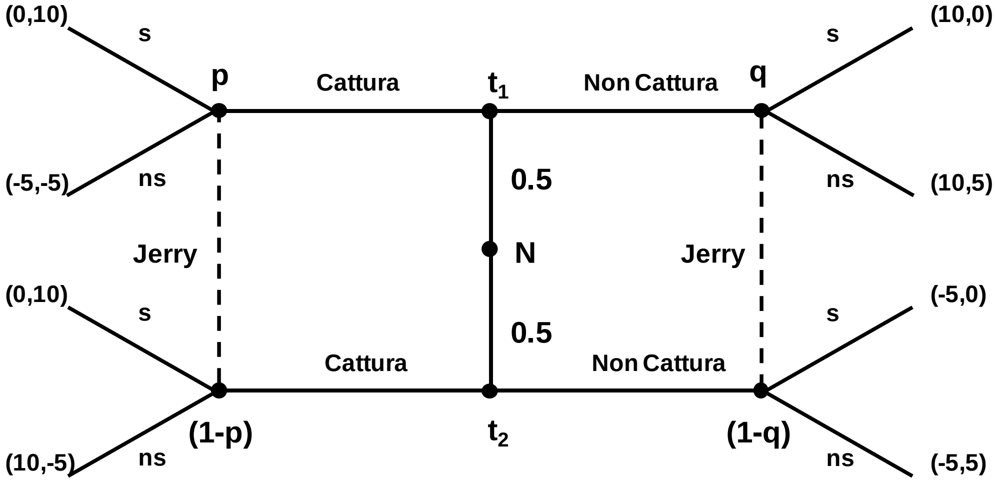
Esempio 3. Tom e Jerry e le strategie dominanti.

Il giocatore **I** (un gatto) può mostrarsi con due tipi: t_1 **Tom buono** (con prob. 0,5) e t_2 **Tom cattivo** (con prob. 0,5). **Tom buono** preferisce non catturare Jerry (un topo), ma soltanto giocare, **Tom cattivo** preferisce catturare Jerry. **Jerry** preferisce non essere catturato, ma non gli va di scappare inutilmente.

-Tom buono ha un'utilità di 10 se decide di non catturare Jerry, indipendentemente da cosa fa Jerry, **0** se decide di catturare Jerry, e Jerry scappa, **-5** se decide di catturare Jerry, e Jerry non scappa.

-Tom cattivo ottiene 10 se decide di catturare Jerry, e Jerry non scappa, **-5** se decide di non catturare Jerry, indipendentemente da cosa fa Jerry, **0** se decide di catturare Jerry e Jerry scappa.

-Jerry, ottiene 10 se scappa mentre Tom cerca di catturarlo, **0** se scappa quando Tom non cerca di catturarlo, **5** se non scappa quando Tom non cerca di catturarlo e **-5** se non scappa quando Tom cerca di catturarlo



Notate che in questo caso il giocatore II (Jerry) ha una strategia strettamente dominante in (*s*) nel lato sinistro e in (*ns*) nel lato destro.

Pooling (C,C)

Jerry in questo caso seleziona la sua risposta ottima s, per cui: $t_1 = 0, t_2 = 0$. Sul lato destro, Jerry seleziona necessariamente la strategia ns, per cui abbiamo $t_1 = 10, t_2 = -5$. Il pooling (C,C) non può essere un EBP. Notate: nel lato destro per Jerry non può essere mai ottimale giocare s (strategia strettamente dominata).

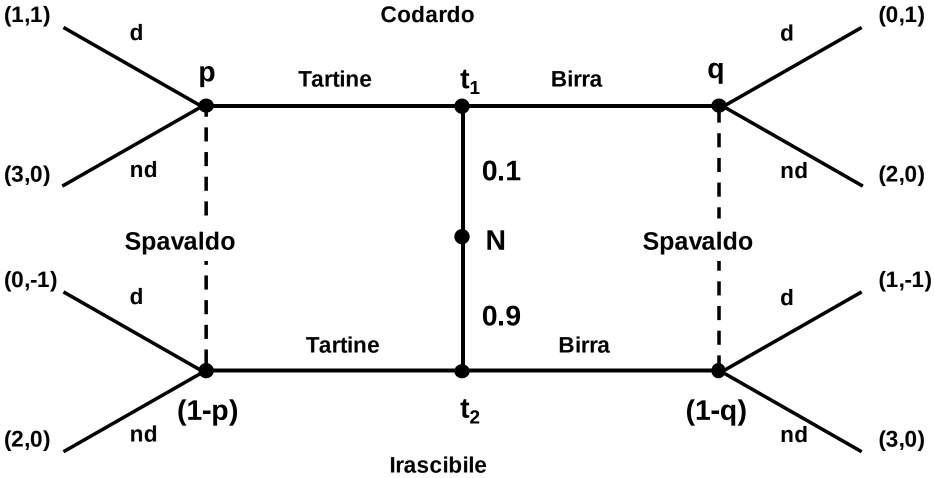
Pooling (NC,NC)

Jerry sappiamo che gioca *ns*, che implica $t_1 = 10, t_2 = -5$, mentre sul lato sinistro gioca *s* che implica $t_1 = 0, t_2 = 0.$ Il pooling (NC,NC) non può essere un EBP. Notate sul lato sinistro Jerry non può giocare ns in quanto strettamente dominata.

Esempio 4. Tartine e Birra: Una Distribuzione di Natura Ineguale

Il giocatore I sceglie se effettuare la colazione con tartine o birra mentre il giocatore II sceglie la sua strategia tra sfidare il mittente a duello (*d*) o non sfidarlo a duello (*nd*). Riguardo le preferenze, il codardo preferisce per colazione tartine mentre il tipo irascibile la birra. I tipi preferiscono non sfidare a duello il giocatore II. Quest'ultimo preferisce sfidare a duello il tipo codardo e non sfidare quello irascibile.

Questo gioco è stato proposto da Cho e Kreps (1987) ed è noto come *Quiche and Beer*. I giocatori sono identificati (nelle traduzioni) con diversi aggettivi (mollaccione, codardo, duro, irascibile per i tipi del giocatore I e bullo, spavaldo ecc. per il giocatore II). Benché stravagante questa impostazione strategica riflette diversi contesti economici. Ad esempio, possiamo pensare ad un gioco tra due imprese (monopolista ed nuovo entrante) su un determinato mercato. L'entrante può assumere due tipi diversi, titubante ed aggressivo. Il monopolista ovviamente non ha intenzione di essere accomodante con il tipo aggressivo, mentre è disponibile a spaventare il tipo titubante, mostrandosi “belligerante” (es con una politica dei prezzi che renda difficoltoso l’ingresso della nuova impresa sul mercato). In questo caso l’azione (*d*) indica deterrenza, mentre birra e tartine possono essere sostituite rispettivamente da un messaggio di annuncio di entrata di una nuova impresa sul mercato e da un messaggio di annuncio di richiesta di entrata.



Pooling (T,T) Tartine-Tartine

La risposta ottima di II è non duellare (*nd*):

$$\begin{aligned} &gioco \quad d: 1\ \ 0.1 + (\ \ 1)\ \ 0.9 = -0.8 \\ &gioco \quad nd: = 0 \end{aligned}$$

I tipi codardo t_1 e irascibile t_2 otterrebbero, rispettivamente 3 e 2. Se usciamo dal sentiero di equilibrio e analizziamo le payoff del lato opposto possiamo stabilire che

$$\begin{aligned} &se\ II\ gioca\ d \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 1 \\ &se\ II\ gioca\ nd \quad t_1 = 2 \quad t_2 = 3 \end{aligned}$$

Risulta chiaro che il pooling (T,T) per essere un EBP, il giocatore II fuori dal sentiero di equilibrio deve giocare (*d*): il giocatore II deve duellare. Calcolando le utilità attese di II, date le credenze, vediamo che di fatto duellare con una probabilità $q \geq 1/2$ costituisce una risposta ottimale per II:

$$\begin{aligned} &gioco \quad d: q \quad (1 \quad q) = 2q \quad 1 \\ &gioco \quad nd: = 0 \end{aligned}$$

Cioè, affinché duellare sia una strategia ottima per II, $2q \quad 1 \geq 0 \qquad q \geq 1/2$. Quindi:

[(*TT*), (*nd,d*) con *p=0.1* e $q \geq 1/2$ **]** è un EBP

Interpretazione: **Entrambi i tipi del giocatore I mangiano tartine a colazione, e il giocatore II non duella con chi mangia tartine ma duella con chi beve una birra, e attribuisce una probabilità $q \geq 1/2$ al fatto che un individuo che beve una birra sia un codardo.**

Pooling (B,B) Birra-Birra

Le utilità attese di II sono analoghe a quelle ottenute nel precedente pooling (sono analoghe le payoff con le stesse strategie) con II che sceglie di non duellare (*nd*):

$$\begin{aligned} &gioco \quad d: 1 \quad 0.1 + (\quad 1) \quad 0.9 = -0.8 \\ &gioco \quad nd: = 0 \end{aligned}$$

I tipi codardo t_1 e irascibile t_2 ora ottengono rispettivamente 0 e 1. Fuori dal sentiero di equilibrio le payoff sono:

$$\begin{aligned} &se \ II \ gioca \ d \quad t_1 = 1 \quad t_2 = 0 \\ &se \ II \ gioca \ nd \quad t_1 = 3 \quad t_2 = 2 \end{aligned}$$

Notiamo che il pooling (B,B) per essere un EBP, richiede al giocatore II di giocare *d*. Questi dovrà confrontare:

$$\begin{aligned} &gioco \quad d: p \quad (1 \quad p) = 2p \quad 1 \\ &gioco \quad nd: = 0 \end{aligned}$$

da cui emerge che II può giocare la strategia *d* con $p \geq 1/2$.

[(*BB*), (*nd,d*) con *q=0.1* e $p \geq 1/2$ **]** è un EBP