Contrattazione Bilaterale Dinamica (Ariel Rubinstein)

Bruno Chiarini

Materiale per il Corso di *Analisi Strategica per la Politica Economica*

Problema.
Una torta da dividere tra due contendenti con un processo di offerte-controfferte sequenziale. In presenza di impazienza, il valore della torta e delle sue partizioni si riducono con il passare del tempo. L'arco temporale considerato dal processo di contrattazione può essere finito (un certo numero di periodi) o infinito. Il processo può essere considerato come un approccio non cooperativo alla contrattazione.

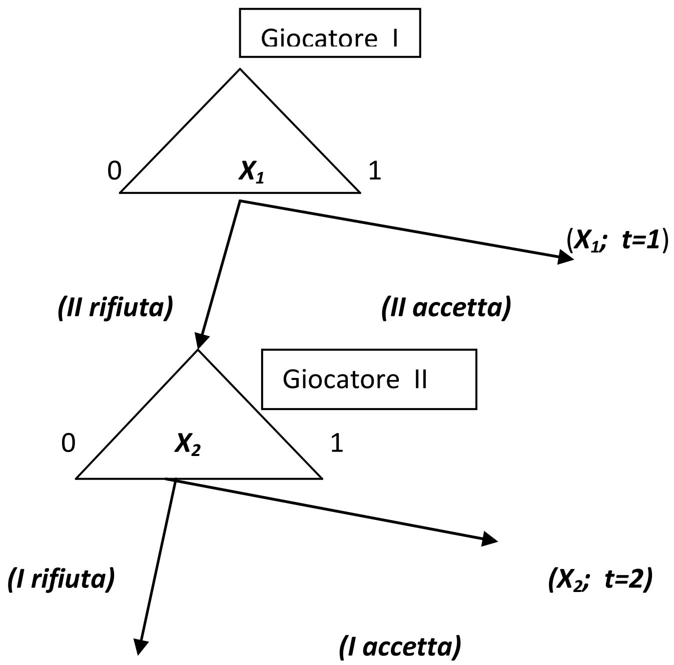
Soluzione di Rubinstein
Quando offerte e domande riguardo la ripartizione di una torta in un gioco di contrattazione sono fatte in maniera sequenziale, e se una soluzione rapida è preferita ad una soluzione protratta nel tempo, allora esiste una sola offerta che un giocatore razionale dovrà fare. Il giocatore opponente nel gioco di contrattazione, non ha alternative razionali se non quella di accettare l'offerta immediatamente. Questa soluzione è l'unico SPNE (*Subgame Perfect Nash Equilibrium*) del gioco.[1]

Fattore di Sconto.
Un elemento determinante nel generare la soluzione di Rubinstein, è il *fattore di sconto* $\delta = \dfrac{1}{1+r}$ dove r è il tasso di interesse (o tasso di sconto o tasso di preferenza temporale). Si è indifferenti dal ricevere una torta pari a 100 oggi oppure una torta pari a $(1+r)\cdot 100$ domani. Possiamo anche affermare che un valore pari a 100 domani equivale a $\delta \cdot 100 = \dfrac{100}{1+r}$ oggi.
Il fattore di sconto rappresenta l'*impazienza* (o la miopia) dei giocatori. Più i giocatori sono impazienti più è basso il fattore di sconto con cui attualizzano i valori futuri delle payoff (le payoff o i guadagni futuri valgono di meno). Con $r = 0 \Rightarrow \delta = 1$: assenza di sconto e pazienza infinita.

Forma Estesa del Gioco.
I primi due periodi del gioco sono illustrati nella Figura1. Il gioco inizia nel periodo *t=1*. Il giocatore I è il primo a muovere, selezionando tra un continuum di scelte (di accordi-proposte sulla torta) a sua disposizione (indicate dal triangolo attribuito al suo nodo di decisione). Ogni possibile proposta conduce ad una decisione per il giocatore II. Se questo accetta la ripartizione il gioco termina. La proposta X_I è una ripartizione della torta tra 0 e 1. L'albero termina con due periodi ma possiamo immaginare continui all'infinito dove ogni offerta è rigettata. In questo caso questo sentiero di offerte rigettate conduce ad una soluzione di disaccordo.[2]

[1] Rubinstein A. (1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, 50, 97-109.
[2] Questo gioco è infinito anche in un altro senso. Se le scelte dei giocatori sono un *continuum* (piuttosto che un numero finito di scelte) è chiaro che non si possono illustrare nel diagramma tutte le infinite risposte del giocatore II.

Figura 1



***Regole del Gioco di Contrattazione*.**

Ogni proposta deve essere indicata con $M \in [0,1]$; Nei periodi dispari t=1,3,5,.. il giocatore I propone; nei periodi pari t=2,4,6,.. il giocatore II propone.

Il tempo $t \in \{1,2,3,.....T\}$ è discreto e inizialmente T è finito. Quando *t=T* il gioco finisce e ogni giocatore riceve payoff uguale a 0.

Consideriamo tre round (o tre istanti di tempo) e operiamo con l'induzione a ritroso iniziando dall'orizzonte temporale della contrattazione per trovare la soluzione di Nash perfetta nei sottogiochi. Se l'orizzonte temporale è finito (come in questo caso per tre periodi), possiamo applicare l'induzione a ritroso. Se la contrattazione è intesa su un orizzonte temporale infinito occorre trovare un espediente per applicare l'induzione a ritroso.

Ipotizziamo che chi fa un'offerta rimanga sulla sua posizione per sempre. Quindi, ad esempio *M* è il massimo di payoff che il giocatore I richiede a partire dal primo periodo. Ovviamente, più si andrà avanti nel tempo più questo valore *M* verrà scontato, ma l'offerta del giocatore I è *M*. Se oggi (*t=1*), ad esempio, il giocatore I pensa di ribadire la sua offerta di *M* tra due periodi in avanti (*t=3*), nel caso venga raggiunto questo istante temporale dal processo di contrattazione, questo giocatore è consapevole che il valore scontato di *M* è $\delta^2 \cdot M$. In altri termini stiamo affermando che il valore di *M* a *t=3*, scontato a *t=0* è $\delta^2 \cdot M$ **.**

La caratteristica di questo gioco non è soltanto la funzione di utilità dei giocatori (la ripartizione della torta) ma anche la *deadline* del gioco: il round nel quale il giocatore preferisce uscire dal gioco con utilità nulla piuttosto che proseguire. Si assume che le funzioni di utilità dei giocatori siano del tipo $\delta_i^t \cdot M$ (giocatore *i,* round *t*). Cioè utilità lineari nella quantità di bene ottenuto e con un tasso di sconto che rende preferibile chiudere la contrattazione il prima possibile.

Soluzione Backward Induction.
Soluzione a ritroso. Si parte dall'ultimo round del gioco, che corrisponde alla minore fra le due *deadline* dei giocatori, e a partire da esso si determinano di volta in volta le azioni più razionali dei giocatori fino a risalire al round iniziale. Per comprendere meglio la ricerca dell'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi possibile per questo gioco, cominciamo con l'analizzare il caso più semplice, quello in cui uno dei due giocatori (non importa chi) ha la *deadline* pari a *t=2*. Questo implica che il giocatore che agisce al tempo *t=1* fa un'offerta, mentre il giocatore che agisce al tempo 2 può solo accettare o rifiutare, in quanto poi il gioco finisce. Questa situazione, nota come *ultimatum game*, ha una soluzione molto facile da intuire: il giocatore che agisce per primo sa che l'altro sarà disposto ad accettare qualunque offerta gli procuri una utilità positiva, e per l'*ipotesi di benevolenza* accetterà anche una offerta di utilità nulla (cioè l'utilità che otterrebbe uscendo dal gioco). Per questo motivo il primo giocatore, massimizzando la sua utilità e giocando quindi razionalmente, offre esattamente ciò che è chiamato il "*reservation price*" dell'avversario. Tale offerta viene accettata.
A questo punto dovrebbe risultare chiaro il modo di procedere se i round (o gli istanti di tempo) del gioco sono più di 2. Occorre partire dal fondo e passo dopo passo muoversi a ritroso nel tempo lungo le curve di indifferenza (cioè le curve di livello delle funzioni utilità) dei giocatori. Se sappiamo per esempio che al tempo *t* il giocatore I farà una certa offerta di equilibrio, al tempo $t-1$ il giocatore II farà razionalmente un'offerta che garantisca all'avversario la stessa utilità della mossa che lui farebbe all'istante successivo.
Ora il calcolo dell'induzione a ritroso per tre periodi. Ipotizziamo, per semplicità, che i due giocatori abbiano lo stesso tasso di sconto $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

T=3

L'unico equilibrio (perfetto nei sottogiochi) in questo gioco è banale: I propone la ripartizione (1,0) e II accetta.
Ovviamente II accetta ogni proposta. Quindi II accetta qualsiasi *1-M>0*. Notate comunque che in questo *subgame* la reazione ottima di II è sia *accettare* che *rigettare* l'offerta: in quanto entrambi le strategie producono la stessa payoff di 0. Quindi II è indifferente. Se II opta per accettare allora la proposta ottima di I è esattamente la proposta (1,0).

T=2

Sappiamo che se ora il processo raggiunge il periodo (*t=2*) l'offerta sarà di II (il giocatore che propone). Tenendo conto del fattore di sconto δ, è chiaro che II sa che I non accetterà una proposta inferiore a

(1) $$\delta \cdot M$$

Infatti se si raggiunge *t=3*, è proprio questa la partizione che I otterrebbe. Se II avesse offerto ad I una partizione più elevata di $\delta \cdot M$, questa sarebbe stata accettata da I, per cui non saremmo arrivati al periodo *t=3*. Pertanto non è un equilibrio perfetto la situazione in cui il giocatore I riceve più di $\delta \cdot M$. Ne consegue che il giocatore II riceve almeno $(1-\delta M)$

Cioè, II dovrà proporre

(2) $$\left[1-\delta M,\ \delta M\right]$$

Questa è la conseguenza indotta dall'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi.

T=1

Si procede in maniera analoga. L'offerta torna al giocatore I, Ovviamente il giocatore II non accetta nessuna offerta inferiore a $\delta(1-\delta M)$. Per cui I può ottenere al massimo $1-\delta(1-\delta M)$:

(3) $$\left[1-\delta(1-\delta M),\quad \delta(1-\delta M)\right]$$

Riassunto

- *t=2*, II offre al giocatore I, $\delta \cdot M$, perché è questa la payoff che I prenderà nel round successivo se la contrattazione va avanti. Questa offerta implica che II prende $(1-\delta M)$.

- *t=1*, I offre al giocatore II, $\delta(1-\delta M)$, perché è questa la payoff che II prenderà nel round successivo se la contrattazione va avanti. Questa offerta implica che I prende $1-\delta(1-\delta M)$

Quindi al primo round I offre $\left[1-\delta(1-\delta M),\quad \delta(1-\delta M)\right]$ e II accetta. Unico SPNE. E' l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi perché l'unico ottenuto con le migliori risposte reciproche in ogni round.

Contrattazione Sequenziale all'Infinito.

Si può risolvere il problema di contrattazione per un infinito numero di periodi, ottenendo l'unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi.
Ora non è possibile procedere con l'induzione a ritroso come nel caso di un finito numero di round, non esiste l'ultima mossa da dove iniziare a valutare le strategie a ritroso. L'espediente poggia sulla seguente idea: il giocatore I proporrà la stessa offerta che costituisce il suo payoff massimo nel primo round (*t=1*) e che dovrà coincidere con quello del terzo round (*t=3*) al netto dello sconto. Cioè, come si è detto in precedenza, I offre sempre M che però viene scontata nei periodi futuri. Considerato che I offre per se nel primo round $1-\delta(1-\delta M)=1-\delta+\delta^2 M$, pertanto uguagliando la sua offerta che gli consente di ottenere il massimo con quanto ottiene con una contrattazione di tre round abbiamo:

(4) $$M = 1-\delta+\delta^2 M \quad = \quad \frac{1-\delta}{1-\delta^2} \quad = \quad \frac{(1-\delta)}{(1-\delta)(1+\delta)} \quad = \quad \frac{1}{1+\delta}$$

La (4) è valida, come accennato sopra, con due giocatori che hanno lo stesso tasso di sconto $\delta_1=\delta_2=\delta$. Quindi avremo l'equilibrio perfetto nei sottogiochi dato dalla coppia:

(4.1) $$\left[\left(\frac{1}{1+\delta}\right);\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\right]$$

Notate che questa soluzione prevede che il giocatore I ottenga $\frac{1}{1+\delta} > \frac{1}{2}$. Si conferma il vantaggio di effettuare la prima mossa, ma occorre notare come questo vantaggio tende ad annullarsi come δ si avvicina ad 1. Con $\delta = 1$, assenza di impazienza, la torta è divisa in maniera eguale tra i due contendenti.
L'intuizione per passare da tre periodi a un arco di tempo indeterminato, poggia sul fatto che per il giocatore I, la partizione *M* costituisce un'offerta ottima che riproporrà sempre in ogni round. Il gioco del terzo periodo è analogo al gioco del primo periodo con l'unica eccezione che la torta si è ridotta di δ^2. Proprio per questo l'offerta di I è quel valore che uguaglia $1-\delta(1-\delta M)$. Cioè, il valore della partizione che lo stesso giocatore avrebbe offerto in una logica di tre-round, due periodi prima. Queste sono due espressioni equivalenti che esprimono il massimo che il giocatore I può ricevere in periodi diversi. Uguagliandole troviamo il SPNE. Di fatto nel terzo periodo il massimo valore non-scontato che il giocatore I può ottenere è appunto *M*. Il giocatore I non può ottenere un valore superiore a *M*. Il "trucco" è quindi troncare un gioco con orizzonte infinito a applicare la logica utilizzata nel gioco di orizzonte finito con il gioco che inizia nel terzo periodo uguale al gioco complessivo (quello che inizia la primo periodo). Di nuovo il giocatore I formula la prima proposta nel processo sequenziale e così via.[3]

Nel caso di *due tassi di sconto diversi* avremmo:

t=3:	$M,\ 1\text{-}M$	proposta ottima di I, II è indif. tra acc. e rifiut.
t=2:	$[1-\delta_2 M,\ \delta_1 M]$	proposta ottima di II, I è indif. tra acc. e rifiut.
t=1:	$[1-\delta_2(1-\delta_1 M),\quad \delta_2(1-\delta_1 M)]$	proposta ottima di I, II è indif. tra acc. e rifiut.

e, quindi per l'ipotesi di stazionarietà dell'offerta (I offre sempre M) e considerato che I offre per se nel primo round $1-\delta_2(1-\delta_1 M) = 1-\delta_2+\delta_1\delta_1 M$, avremo:

(5) $$M = 1-\delta_2+\delta_2\delta_1 M \quad = \quad \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

Quindi all'inizio del gioco, il giocatore I farà la seguente offerta:

$$\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

e il giocatore II accetterà, concludendo la contrattazione:

[3] In realtà il problema è più complesso. Si veda Shaked A. and Sutton J. (1984), Involuntary unemployment as a perfect equilibrium in a bargaining game, *Econometrica* 52, 1351-64. Una trattazione introduttiva ma più complessa di quella riportata in queste note è in Gibbons (1994) e Fudenberg e Tirole (1991). Occorre notare che per le proprietà delle serie geometriche convergenti con $\delta < 1$ otteniamo che $\frac{1}{1+\delta} = 1+\delta+\delta^2+\delta^3$...... La partizione del giocatore I coincide con la somma delle riduzioni della torta che si avrebbero se il processo è rimandato all'infinito per il rifiuto continuo del giocatore II. Questo principio è valido anche se i tassi di sconto sono diversi.

$$1-\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \quad = \quad \frac{\delta_2-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

Tali strategie $\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}; \quad \frac{\delta_2-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}\right)$costituiscono un equilibrio perfetto del gioco. Un esempio numerico può essere di aiuto per fissare le soluzioni in mente. Se i due giocatori hanno lo stesso tasso di sconto, ipotizziamo $\delta = \frac{1}{2}$, il modello di Rubinstein applicando la (4.1) ci specifica che I chiederà 2/3 (oltre il 66.6%) della torta mentre II accetterà ottenendo il rimanente 1/3 (oltre il 33.3%). Nel caso i due tassi di sconto differiscano, ad esempio con $\delta_1 = 0.97; \delta_2 = 0.88$, il modello di Rubinstein applicando la (5) ci informa che il giocatore I chiederà subito circa l'82% (quasi i 5/6) della torta e II accetterà ottenendo circa il 18% della torta.

Notate che la torta su cui si basa la contrattazione è normalizzata a 1. Se fosse pari a 100, ovviamente la (5) diventerebbe:

$$M = 100\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}\right) \tag{5.1}$$

Implicazioni del SPNE (5)

1) Con valori decrescenti di δ_1 si riduce l'offerta di equilibrio. Se il primo giocatore è meno impaziente, l'offerta di equilibrio aumenta e viceversa.
2) Con valori decrescenti di δ_2 aumenta l'offerta di equilibrio. Con un giocatore II più impaziente l'offerta di equilibrio del giocatore I aumenta e viceversa. Quindi essere pazienti è conveniente. Infatti se consideriamo la partizione ottenuta dal giocatore I nell'equilibrio perfetto dei sottogiochi, $\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ è chiaro che essa è crescente in δ_1 e decrescente in δ_2.
3) L'unico fattore che spinge i contendenti a trovare un accordo è l'impazienza (riflessa nei due tassi di sconto).
4) In assenza di impazienza (senza tassi di sconto) i round potrebbero continuare per un tempo indefinito.
5) Nel nostro caso il giocatore I ha il vantaggio della prima offerta. Il giocatore I riceve una quantità maggiore della torta in quanto il giocatore II deve attendere per fare la sua conto-offerta e subisce l'effetto dello sconto sulla sua contro-offerta. Dunque il giocatore I sposta tutto l'onere dell'attesa sul giocatore II. Il risultato sull'unicità dell'equilibrio poggia su questo elemento. Una volta che un giocatore ha formulato l'offerta, l'altro giocatore può sottrarsi ai costi dell'attesa soltanto accettando. Se la proposta non è soddisfacente, i costi dell'attesa possono non essere così stringenti per il giocatore II. Quindi, il giocatore che formula l'offerta offrirà all'altro giocatore un ammontare esattamente sufficiente a rendere quest'ultimo indifferente tra l'accettazione dell'offerta e l'attesa di un periodo, prima di formulare a sua volta un'offerta da rendere il precedente giocatore esattamente indifferente dall'accettare quest'ultima e l'attesa di un ulteriore periodo, e così via.
6) Più è elevata la pressione per un accordo immediato (o più elevata è la miopia dei giocatori con tassi di sconto molto piccoli) più è grande la parte che riceve il giocatore I.

7) Due caratteristiche importanti dei problemi di contrattazione nelle situazioni reali sono alla base del modello di contrattazione: i) il processo di contrattazione è *time consuming* e quindi costoso. In questa rappresentazione parliamo di impazienza, ma rientrano nei costi di una contrattazione prolungata anche il rischio di rompere il processo stesso di contrattazione, le opportunità perse mentre si è impegnati nel processo, e qualsiasi altra considerazione per cui il suo prolungamento è un costo. ii) Il giocatore che ritiene il tempo di contrattazione meno costoso ha un potere di contrattazione più elevato che gli permette di ottenere una più ampia parte della torta.

I Vantaggi del Giocatore I

Ci possiamo domandare quanto del vantaggio del giocatore I sia attribuibile alla sua minore impazienza e quanto, di questo vantaggio, sia invece legato al fatto che debba muovere per primo.

Ipotizziamo che il giocatore I abbia un tasso di sconto pari a $\delta = 0.98$ e il giocatore II un tasso pari a $\delta = 0.85$. Con l'ausilio della (5) otteniamo che $M = \frac{1-0.85}{1-0.98 \cdot 0.85} = 0.898$. In altri termini, il primo giocatore prende una componente della torta quasi 8 volte superiore a quella del secondo giocatore. Cerchiamo di vedere perché, iniziando a considerare una situazione dove i due contendenti hanno lo stesso tasso di sconto. In questo caso sappiamo che la soluzione è data dalla (4.1). Ora il giocatore I prende $\frac{1}{1+0.98} = 0.501$. Il giocatore I riduce drasticamente la sua parte da 0.898 a 0.501, ciò implica che la parte eccedente della sua torta su quella di II è sostanzialmente dovuta al più alto grado di impazienza di quest'ultimo.

E' interessante notare che nel caso ipotizziamo che il giocatore I ha lo stesso grado di impazienza di II, la sua parte ammonterebbe a $\frac{1}{1+0.85} = 0.54$, cioè comunque vicino a ½ (la divisione della torta a metà). Emerge quindi che soltanto per i giocatori che sono molto impazienti il vantaggio della prima mossa diventa significativo. Inoltre se il tempo di risposta nei vari round diminuisce, il vantaggio della prima mossa si riduce fino ad annullarsi quando il tempo tra due periodi tende a zero.

Equilibri di Nash, Minacce non Credibili nel Gioco di Contrattazione Dinamica.

La soluzione sopra esposta, è legata all'esigenza di trovare una risposta alla logica che è alla base di un processo di offerte e contro-offerte. Come si fa a credere che un giocatore (in qualsiasi contesto di contrattazione si trovi) annunci una offerta di ripartizione come credibile? Come è possibile sapere se l'offerta di un giocatore è davvero la sua ultima offerta? E nel caso sia la sua ultima offerta, è credibile? Ken Binmore sintetizza così l'esigenza ora descritta:

"*Cosa succede quando tutto quello che dice un giocatore deve essere credibile prima che l'altro giocatore gli creda? Questa domanda ha portato Ariel Rubinstein a dare il maggiore di tutti i contributi al programma di Nash*" [4]

[4] Ken Binmore, *Game Theory. A Very Short Introduction*, Oxford University Press, 2007. Trad. Italiana Codice Edizioni Torino. 2008.

Nei giochi di contrattazione ogni soluzione è "razionalizzabile" e quindi ogni soluzione è un equilibrio di Nash. Se il giocatore I si aspetta che il giocatore II accetti il 40% della torta, né domanderà il 60%, mentre II anticipa questo risultato. La ripartizione (60%-40%) è una distribuzione della torta e costituisce una soluzione di equilibrio, confermando le attese dei giocatori. Dato che ogni soluzione è razionalizzabile, la teoria della contrattazione non offre una guida per i giocatori sulle strategie da adottare. Le ipotesi di agenti razionali, conoscenza comune e l'uso dell'induzione a ritroso possono aiutare a definire le strategie appropriate.
Di fatto possiamo strutturare in maniera più formale queste strategie:

*Il giocatore I propone **M** in tutti i periodi dispari (1,3,5,7….) e accetta l'offerta del giocatore II in tutti i periodi pari (2,4,6,8….) solo se non sono inferiori a **M**. Il giocatore II accetta l'offerta di I in tutti i periodi dispari (1,3,5,7….) purché essa non sia superiore a **M**, mentre nei periodi pari (2,4,6,8….) offre a I la quantità **M**.*

Per qualunque ammontare di *M*, queste strategie costituiscono le migliori risposte reciproche e quindi sono equilibri di Nash. Tuttavia, si noti, in ognuna di queste strategie è implicita una *minaccia*: ogni offerta superiore ad *M* da parte del giocatore I non sarà accettata così come non verrà accettata ogni controproposta di II con una ripartizione per il giocatore I inferiore a *M*.[5] A questo punto è naturale chiedersi se tali minacce siano credibili.
Procediamo con ancora un esempio. Consideriamo due giocatori con un identico fattore di sconto: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Nel processo sequenziale di offerta e controfferta, ad ogni round, la torta perde valore di una proporzione pari a $1-\delta$. Ad esempio se $\delta = 0.95$, quando un'offerta è rigettata, solo il 95% della torta è ancora disponibile per la contrattazione nel round successivo. Infatti la torta si è ridotta per un valore pari al 5% ($1-\delta$).
Ora veniamo alla strategia del giocatore II e poniamo che affermi:

rifiuto ogni offerta che mi attribuisce meno dell'80% della torta

questa strategia, in principio, può essere razionalizzabile, ma non lo è più se consideriamo le alternative disponibili in un contesto di contrattazione. Questa strategia è infatti basata su una minaccia non credibile.
Ipotizziamo che il giocatore I offra "solo" il 79.9%. Se II mantiene la sua strategia (chiede sempre e solo l'80%) rigetterà l'offerta. Tuttavia questo rifiuto sarà costoso per II, dato che nel round successivo la torta si riduce. Anche se la strategia di II inducesse, nel round successivo, il giocatore I ad offrire l'80% della torta al giocatore II, quest'ultimo otterrebbe l'80% di una torta ridimensionata. Il giocatore II non ha incentivi a mantenere la strategia "*solo l'80%*": è una minaccia non credibile. Se poniamo la torta pari a 100, la strategia afferma che II accetterà solo 80. Ma se rigetta 79.9, nel prossimo round, quand'anche il giocatore I gli conceda l'80%, II prenderebbe non più di 76.
Questo tipo di ragionamento elimina un grande numero di possibili strategie. Di fatto esse non saranno mantenute sotto conoscenza comune e razionalità degli agenti. Rubinstein usa questa logica per dimostrare che esiste una sola soluzione che non coinvolge l'uso di minacce non credibili: $\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}; \quad \frac{\delta_2-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \right)$.

[5] Una illustrazione più rigorosa degli equilibri di Nash in un sistema di contrattazione dinamico è in Osborne and Rubinstein (1990).

Critiche e Realismo del Modello di Rubinstein.

Possiamo domandarci se nella soluzione di equilibrio perfetto di Rubinstein ci siano considerazioni tali che rendano razionale per il giocatore II accettare immediatamente l'offerta $\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$. Per semplificare ipotizziamo di nuovo tassi di sconto analoghi per i due giocatori, $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.5$, sappiamo dall'esempio riportato a commento dell'equazione (5) che, con questo grado di impazienza, I offre 2/3 a se stesso e 1/3 al giocatore II e questo accetta. Ovviamente, nel caso non accettasse l'offerta di I, nel periodo *t=2* il giocatore II deve ottenere una ripartizione che gli garantisca *x*%>33.3% della torta, e valutarla più conveniente in questo secondo periodo piuttosto che il 33.3% immediatamente (a *t=1*). Possiamo definire questa scelta razionale? Una possibilità per giustificarla come razionale è che una volta rigettata l'offerta del giocatore I a *t=1*, il giocatore II confidi sull'inesperienza di quest'ultimo, o che non sappia come comportarsi e resti sorpreso e quindi faccia delle concessioni non programmate precedentemente. E' possibile ed è razionale un ragionamento simile? In molti contesti, avendo un opponente considerato comunque superiore o in una posizione di vantaggio, molti giocatori possono opporvisi tentando il "tutto per tutto" (ad esempio, in una battaglia si può essere disposti a morire) piuttosto che arrendersi e accettare una situazione molto svantaggiosa. Questa strategia può portare a concessioni insperate. In questi casi non sarebbe una strategia irrazionale deviare dalla soluzione SPNE indicata da Rubinstein.

Ipotizziamo che il giocatore II rigetti l'offerta SPNE del giocatore I. Il giocatore II potrebbe pensare che questa decisione segnali al giocatore I l'intenzione di ottenere una più equa ripartizione della torta. Possiamo giustificare questo atteggiamento (un atteggiamento fuori dal SPNE)? La risposta fornita dalla teoria è che una deviazione dalla soluzione SPNE può esserci ma è legata alla possibilità di effettuare piccoli errori (*trembling hand*). Questo implica che una deviazione dal SPNE non è dettata da una scelta consapevole e razionale e ciò è conoscenza comune: errori dovuti ad attimi di indecisione, fattori psicologici, dimenticanze, abbagli ad altro, ma non decisioni consapevoli. In questo contesto rigettare 1/3 della torta da parte del giocatore II può indubbiamente colpire e sorprendere il giocatore I ma non costituirebbe per lui un evento eccezionale e impossibile. Quindi I ignorerà sicuramente la decisione di II (I infatti penserà che II sia caduto in qualche modo in errore, tra l'altro, molto piccolo) e ripeterà la sua offerta sebbene con una torta ridimensionata. Se il giocatore II anticipa questo ragionamento sarà conveniente per lui non rigettare l'offerta iniziale di 1/3. Dunque, mediante l'equilibrio *trembling hand* di Selten,[6] si può definire la divisione della torta in (2/3; 1/3) come la sola strategia razionale di contrattazione: la strategia di Rubinstein formulata all'inizio del gioco. In altri termini, le sole strategie di questo gioco di contrattazione che sono anche supportate da un *trembling hand equilibrium* sono quelle raccomandate da Rubinstein: perfino se c'è una deviazione dal SPNE, se questa deviazione è considerata frutto di un piccolo errore, le strategie scelte saranno quelle indicate dalla (4.1) o dalla (5).

Alcuni autori si sono posti domande sul perché i giocatori debbano considerare eventuali rifiuti delle proposte come frutto soltanto di un errore e non come un segnale chiaro di una strategia diversa. Su questo punto insistono Hargreaves Heap and Varoufakis nella loro "Introduzione Critica", sottolineando come utilizzare l'espediente del *trembling hand* di fatto significa imporre una visione piuttosto ristretta sulle credenze (beliefs) fuori dall'equilibrio. Per riprendere il nostro esempio, quando il giocatore I si vede rifiutare la sua offerta (2/3; 1/3) (che è un equilibrio di Nash nei sottogiochi ed è sul sentiero di equilibrio), non si capisce perché deve pensare (formulare le sue credenze) in maniera tale da considerare questo allontanamento dal sentiero di equilibrio del giocatore II come frutto di un piccolo errore. In maniera analoga, non è

---

[6] R. Selten (1975), Re-examination of the perfectless concept for equilibrium in extensive games, *International Journal of Game Theory*, 4, 22-25.

del tutto chiaro perché il giocatore II accetti che il giocatore I valuti la sua decisione come frutto di un piccolo errore.

Il modello come presentato in queste note è chiaramente lontano dalla contrattazione reale. Del resto non è adatto a spiegare fenomeni come scioperi, cambi di opinioni con concessioni negate in una fase precedente della contrattazione e, in generale, la sua soluzione non è coerente con conflitti e guerre (ipotizzando paesi che contrattano su obiettivi o territori specifici) che spesso caratterizzano il mondo reale. Un ingrediente fondamentale per renderlo più realistico è l'incertezza che si potrebbe inserire rinunciando all'ipotesi di informazione completa.[7]

Alcune estensioni del modello di Rubinstein, avanzate da diversi autori,[8] sebbene con informazione completa sono particolarmente interessanti e arricchiscono il modello con elementi che conducono a situazioni più concrete e reali. Una rassegna è riportata in Osborne and Rubinstein (1990). Particolarmente interessanti sono:

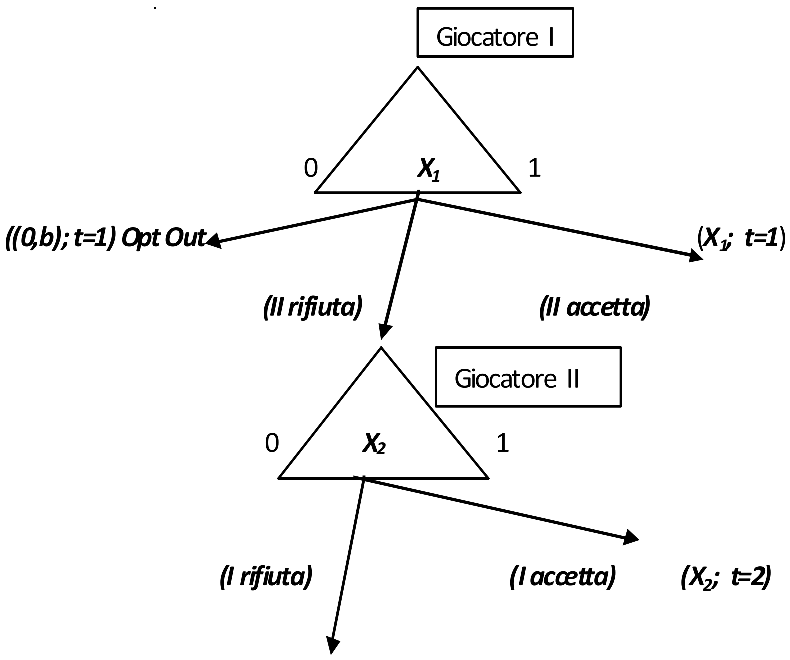
i) L'esistenza di *opzioni esterne* alla contrattazione e, quindi, la possibilità che un giocatore possa abbandonare la contrattazione per queste opzioni. Questa possibilità introduce una nuova strategia *opt out*: in qualche periodo o round della contrattazione uno o entrambi i giocatori possano minacciare di uscire dal gioco piuttosto che continuare il processo di contrattazione. A volte tali minacce possono essere eliminate facilmente in quanto certamente non credibili. Ad esempio, quando si minaccia di abbandonare il gioco, ma l'eventuale payoff che si otterrebbe mettendo in pratica tale minaccia risulta inferiore di quella che si avrebbe con l'accettazione del SPNE. Tuttavia, a volte, queste minacce possono essere credibili, come nel caso in cui l'*opting out* produce per il giocatore che la pratica un risultato maggiore del SPNE. E' forse in questo contesto che si può collocare una risposta alla critica riportata da Hargreaves Heap e Varoufakis e discussa sopra.

   Ad esempio nella Figura 2 è riportato il caso in cui *l'opzione esterna* interviene nel periodo t ed indica che se il giocatore II *opt out*, il gioco termina con una payoff pari a 0 per il giocatore I e pari a b (con $b<1$) per il giocatore II.

[7] Per un esempio di contrattazione con informazione incompleta si può vedere Rasmunsen (1989).

[8] Tra questi Binmore, Wolinsky, Shaked, Sutton, van Damme e lo stesso Rubinstein. Una introduzione rigorosa è nella prima parte del volume di Osborne e Rubinstein (1990). Le citazioni e una breve descrizione delle estensioni sono riportate anche in Osborne e Rubinstein (1994) capitolo 7.

Figura 2



Quindi nel primo round, nell'esempio della figura, il giocatore II può accettare l'offerta di I, può minacciare di *opt out* e, infine, può rigettare l'offerta di I. Nei primi due casi il processo di contrattazione termina. Riguardo gli esiti di questo gioco (assumendo che entrambi i giocatori abbiano lo stesso tasso di sconto) si possono elencare i seguenti tre casi:

Se $b < \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)$, il gioco ha un unico SPNE che coincide con il SPNE definito dalla (4.1). Il giocatore I proporrà sempre $\left[\left(\frac{1}{1+\delta}\right);\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\right]$.

Se $b > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)$, il gioco ha un unico SPNE in cui il giocatore I proporrà sempre $\left[(1-b);b\right]$e sarà disponibile ad accettare ogni offerta maggiore o uguale a $\delta(1-b)$, mentre il giocatore II proporrà sempre $\left[\delta(1-b);1-\delta(1-b)\right]$e accetterà ogni proposta maggiore o uguale a b (e, ovviamente, *opt out* se questa proposta è minore di b). L'accordo immediato è quindi $\left[(1-b);b\right]$.

Se $b = \left(\dfrac{\delta}{1+\delta} \right)$, in ogni SPNE la ripartizione immediata è $[(1-b); b]$.[9]

ii) La possibilità che non sia l'impazienza il motore del processo di contrattazione (e quindi che il tempo non abbia un ruolo predominante nel processo) che spinge i giocatori verso una soluzione, ma il *rischio* che la negoziazione stessa si interrompa.
iii) La possibilità di specificare un processo di contrattazione con più di due giocatori.

Testi introduttivi utilizzati per queste note:

Hargreaves Heap S.P. and Varoufakis Y. (1995), *Game Theory. A Critical Introduction*, Routledge
Fudenberg D. and Tirole J. (1991), *Game Theory*, MIT Press.
Gibbons R. (1994), *A Primer in Game Theory*, Harvester-Wheatsheaf. Trad. Ital. Il Mulino.
Morrow J.D. (1994), *Game Theory for Political Scientists*, Princeton University Press.
Osborne M.J. and Rubinstein A. (1990), *Bargaining and Markets*, Academic Press.
Osborne M.J. and Rubinstein A. (1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press.
Rasmunsen E. (1989), *Games and Information. An Introduction to Game Theory*, Blackwell. Trad. Ital. Hoepli.
Vega-Redondo F. (2003), *Economics and the Theory of Games*, Cambridge University Press.

[9] Un'esposizione introduttiva delle prove di queste tre casi relativi alla *opt out* (0,b) si trova in Osborne e Rubinstein (1990).